где $(t,x)\in I\times\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{C}(D,\mathbb{R}^{n\times n})$, $f_i\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$ $(i=0,1)$ матрица-функция $A(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x (локально) в области $D=\{(t,x):t\in I,$ $\|x\|<\delta\}$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$, $0<\delta\leqslant\infty$, λ — скалярный вещественный параметр.

В данной работе, являющейся продолжением [1] и развитием [2], задача (1), (2) исследуется с помощью метода [3, гл. III].

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho=\{(t,x):t\in I,\ \|x\|\leqslant\rho\},\quad \alpha=\max_t\|A(t,0)\|,\quad B(\omega,0)=\int_0^\omega A(\tau,0)d\tau,\quad \gamma=\|B^{-1}(\omega,0)\|,$$

$$h_i=\max_t\|f_i(t)\|,\quad \varepsilon=|\lambda|,\quad \varphi(\rho,\varepsilon)=a_0\rho^2+a_1\rho+a_2,\quad q(\rho)=\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2+\gamma K\omega\rho(\alpha\omega+2),$$

$$a_0=\gamma K\omega\left(\frac{1}{2}\alpha\omega+1\right),\quad a_1=\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2,\quad a_2=\gamma\omega(h_0+\varepsilon h_1)\left(\frac{1}{2}\alpha\omega+1\right),$$

где $0<\rho<\delta$, $t\in I$, $K=K(\rho)$ — постоянная Липшица для $A(t,x)$ в D_ρ.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* $\det B(\omega,0)\neq 0$, $\varphi(\rho,\varepsilon)\leqslant\rho$, $q<1$. *Тогда в области* D_ρ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение может быть построено как предел равномерно сходящейся последовательности функций* $\{x_k(t)\}_0^\infty$, *определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2).

Вычислительная схема соответствующего алгоритма в дифференциальной форме дается соотношением

$$\frac{dx_{k+2}}{dt}=A(t,x_k)x_{k+1}+f_0(t)+\lambda f_1(t),\quad k=0,1,2,\ldots,$$

где $x_0=0$, $x_1=-B^{-1}(\omega,0)\int_0^\omega[f_0(\tau)+\lambda f_1(\tau)]\,d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости последовательности $\{x_k(t)\}_0^\infty$.

Литература

1. Титов В. Л. *О разрешимости периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных систем с параметром* // XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям (Еругинские чтения–2013): тез. докл. междунар. науч. конф., Гродно, 13–16 мая 2013 г. Ч. 1. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. С. 67.

2. Лаптинский В. Н., Титов В. Л. *К теории периодических решений полулинейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, №8. С. 1036–1045.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

О СОСТОЯНИЯХ РАВНОВЕСИЯ ПРОЕКТИВНО ОСОБОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ЭКВАТОРЕ СФЕРЫ ПУАНКАРЕ

В.Б. Тлячев, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, Россия

stvb2006@rambler.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=0}^n P_i(x,y)\equiv P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i=0}^n Q_i(x,y)\equiv Q(x,y),\tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum_{r+s=i} a_{rs}x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum_{r+s=i} b_{rs}x^r y^s$, $a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(P,Q)=1$, $|P_n(x,y)| + |Q_n(x,y)| \not\equiv 0$.

Если для системы (1) выполняется условие

$$Q_n(x,y) \equiv y\varphi_{n-1}(x,y), \quad P_n(x,y) \equiv x\varphi_{n-1}(x,y), \tag{2}$$

где $\varphi_{n-1}(x,y)$ — однородный многочлен степени $n-1$, то система (1) называется проективно особой системой по терминологии [1], а по [2] — системой с вырожденной бесконечностью. Будем говорить, что система (1) имеет инвариантное множество M_A^r, если состоянию равновесия A этой системы инцидентны r инвариантных прямых, где $r \leqslant n$.

Теорема 1. *Если система* (1) *является проективно особой и имеет инвариантное множество* M_A^n, *то она посредством афинного преобразования переменных* x *и* y *может быть приведена к системе:*

$$\begin{aligned} dx/dt &= x[Q_{n-1}(x,y) + P_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \\ dy/dt &= y[Q_{n-1}(x,y) + Q_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \end{aligned} \tag{3}$$

где $Q_i(x,y)$ *— однородные многочлены степени* i $(i=\overline{1,n-1})$, $P_{n-2}(x,y)$ *— однородный многочлен степени* $n-2$, *причем* $P_{n-2}(x,y) \not\equiv Q_{n-2}(x,y)$.

Теорема 2. *Пусть* M_O^n *и* M_N^n *— инвариантные множества проективно особой системы* (1), *не имеющей параллельных инвариантных прямых. Тогда эта система имеет не более одного состояния равновесия на экваторе сферы Пуанкаре.*

Следствие 1. *Проективно особая система* (1) *при* $n=4$ *не имеет бесконечно удаленного состояния равновесия, если* $M_{K_1}^n$ *и* $M_{K_2}^n$ *— инвариантные множества этой системы, а на инвариантной прямой* K_1K_2 *расположено четыре состояния равновесия* (1).

Следствие 2. *Пусть проективно особая система* (1) *при* $n=3$ *имеет два инвариантных множества* $M_{K_1}^3$ *и* $M_{K_2}^3$, *но не имеет параллельных инвариантных прямых. Тогда для наличия у этой системы бесконечно удаленного состояния равновесия необходимо отсутствие инвариантной прямой* $L \notin M_{K_1}^3 \cup M_{K_2}^3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках единого заказа наряда для Адыгейского госуниверситета.

Литература

1. Горбузов В. Н. *Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка.* arXiv:1401.1000. http://arxiv.org/pdf/1401.1000.pdf

2. Долов М. В. *О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью* // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2010. №8. С. 132–137.

СИСТЕМА С ПЛОСКО-ПОЛУРЕГУЛЯРНОЙ ФУНКЦИЕЙ СООТВЕТСТВИЯ

Д.Н. Чергинец

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
chirgin@tut.by

Система

$$\dot{x} = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{k+4} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x y^{k+3} - x^2 y, \quad \dot{y} = \frac{-xy^2}{n+2} + x^2 y\left(B + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right) + Cx^3, \tag{1}$$